Concursul de Matematică
„ Nicanor Moroşan” - Pîrteştii de Jos
Ediția a XV-a
01.04.2023

Clasa a VIII – a
Barem de corectare și notare

1. Fie expresia:
   $E(x) = \left(\frac{2}{x+2} + \frac{4x}{4-x^2} + \frac{-6x-6}{x^2-x-2}\right) \cdot (2-x)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 2\}$.
   c) Arătați că expresia E(x) nu depinde de x. **(4 puncte)**
   d) Determinați numerele întregi nenule n pentru care fracția $\frac{(n+1)E(n)}{3n+1}$ este număr întreg. **(3 puncte)**

<u>Barem</u>:

a) $E(x) = \left(\frac{2}{x+2} + \frac{4x}{(2-x)(2+x)} + \frac{-6x-6}{(x-2)(x+1)}\right) \cdot (2-x)$ ……………….1p

$E(x) = \left(\frac{2}{x+2} - \frac{4x}{(x-2)(x+2)} + \frac{-6}{x-2}\right) \cdot (2-x)$ ……………………….1p

$E(x) = \frac{-8x-16}{(x+2)(x-2)} \cdot (2-x)$ ……………………………………….1p

Finalizare: $E(x) = 8$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 2\}$.......................................1p

b) $\frac{(n+1)E(n)}{3n+1} = \frac{8n+8}{3n+1} \Longrightarrow (3n+1) | (8n+8)$..1p

$(3n+1) | 3(8n+8) - 8(3n+1) \Longrightarrow (3n+1) | 16$...................................1p

Finalizare: $n \in \{-3, -1, 0, 1, 5\}, n \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 2\}, n \in \mathbb{Z}^* \Longrightarrow n \in \{-3, 1, 5\}$………..1p

2. a) Se consideră suma $S = \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \frac{3}{11 \cdot 14} + \ldots + \frac{3}{62 \cdot 65}$.
   Arătați că S este termen al intervalului $(0{,}1(6); 0{,}(2))$. **(4 puncte)**

   b) Determinați numerele reale x, y, z care îndeplinesc următoarea condiție:
   $$\sqrt{9x^2 - 12x + 20} + \sqrt{y^2 + 6y + 10} + \sqrt{4z^2 - 4z + 5} \leq 7.$$
   (3puncte)

<u>Barem</u>:

a) $S = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{62} - \frac{1}{65}$.......................................1p

$S = \frac{1}{5} - \frac{1}{65} = S = \frac{12}{65}$...1p

$S \in (0{,}1(6); 0{,}(2)) \Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{12}{65} < \frac{2}{9}$ 1p

Justificare inegalitate 1p

b) $\sqrt{(3x-2)^2 + 16} + \sqrt{(y+3)^2 + 1} + \sqrt{(2z-1)^2 + 4} \leq 7$..............1p

$\sqrt{(3x-2)^2 + 16} \geq 4, \sqrt{(y+3)^2 + 1} \geq 1, \sqrt{(2z-1)^2 + 4} \geq 2$......1p

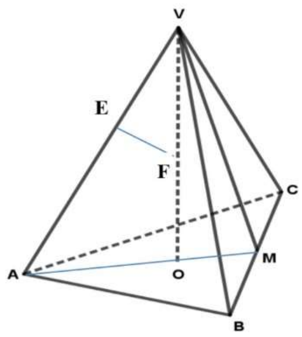
Finalizare: $x = \frac{2}{3}, y = -3, z = \frac{1}{2}$……………………………………..1p

3. Fie o piramidă triunghiulară regulată notată $VABC$, cu baza triunghiul echilateral ABC şi $AB = 12m$. Punctul M este mijlocul segmentului BC şi $VM = 6\sqrt{3}m$, iar VO este înălţimea piramidei.

a)Determinați cosinusul unghiului format de o față laterală a piramidei cu planul bazei. **(4 puncte)**

b)Demonstraţi că distanţa de la mijlocul înălţimii VO la dreapta VA este mai mică decât $3m$. **(3 puncte)**

Barem:

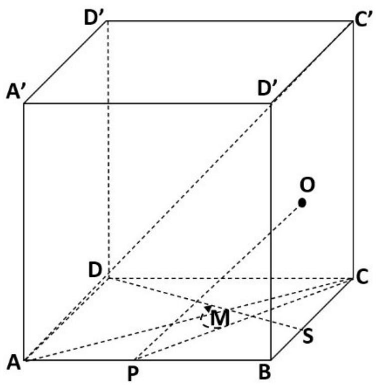


a) Realizare figură ……………………………………………..1p
Calculul elementelor $OM = 2\sqrt{3}\ m$……………………....1p
Identificarea unghiului plan corespunzător diedrului
$\sphericalangle((VBC),(ABC)) = \sphericalangle(VM, OM) = \sphericalangle VMO$……………..1p
Finalizare $\cos \sphericalangle VMO = \frac{1}{3}$……………………………...….1p

b) Justificare asemănare $\Delta VEF \sim \Delta VOA$…………………………………..1p
Șirul de rapoarte egale $\frac{VE}{VO} = \frac{EF}{OA} = \frac{VF}{VA} \Leftrightarrow \frac{VE}{4\sqrt{6}} = \frac{EF}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{12}$ ……………1p
Finalizare: $EF = 2\sqrt{2}m < 3m$……………………………………………1p

4. Fie cubul ABCDA'B'C'D' de muchie *a,* în care O este centrul pătratului BCC'B' și P mijlocul segmentului AB.
   c) Arătați că $PO \parallel$ (A'C'C). **(3 puncte)**
   d) Dacă M este piciorul perpendicularei dusă din punctul D pe segmentul CP, demonstrați că $OM \perp PC$. **(4 puncte)**

Barem:



a) Realizare figură ……………… …………1p
Justificare PO linie mijlocie în $\Delta ABC'$..........1p
Finalizare $PO \parallel$ (A'C'C)...............................1p

b) În pătratul ABCD fie $\{S\} = DM \cap CB$.
Cum $DS \perp CP$ și $DC \perp CB$, avem $\sphericalangle PCB \equiv \sphericalangle SDC$
$\Rightarrow \Delta PCB \equiv \Delta SDC\ (C.U.) \Rightarrow PB \equiv CS$.……...……………………….....1p
Deci S mijlocul segmentului BC, cum O mijlocul B C', avem OS linie mijlocie în $\Delta BCC' \Rightarrow OS \parallel DD'$...1p
Din $DS \perp CP$, $DD' \perp CP$, $DS \cap DD' = \{D\} \Rightarrow PC \perp (D'DM)$...................1p
Din $PC \perp (D'DM)$ și $MO \subset (D'DM) \Rightarrow PC \perp MO$....................................1p

Notă. Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.